Análise Numérica

Nelson Mulemba

Noções básicas sobre erros.

Maputo, July 29, 2024

Índice

A Análise Numérica ou Métodos Numéricos envolve o desenvolvimento de algoritmos para resolver problemas matemáticos complexos de forma aproximada. Esses métodos são essenciais quando as soluções exatas não são possíveis e incluem técnicas como encontrar raízes de funções, interpolação, integração e resolução de sistemas de equações. O campo também se preocupa com a precisão e a estabilidade dos resultados, considerando erros de arredondamento e truncamento. Métodos numéricos são amplamente aplicados em diversas áreas, como engenharia e ciências, para modelar fenômenos reais.

Fontes de erros

Erros nos dados

Exemplo: Sistema de numeração escolhido. Alguns números podem não ter uma representação exacta em um determinado sistema;

Simplificação na construção do modelo

Exemplo: Desprezar a massa de um pêndulo ao se calcular o seu período;

Erros de truncamento

- Erros de truncamento são aqueles que resultam do uso de uma aproximação no lugar de um procedimento matemático exacto;
- Truncar um número na casa d_i é desconsiderar as casas $d_{i+j},\ j = 1, 2, 3, \ldots$

Fontes de erros

Exemplo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Então

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \cdots$$

Utilizando os 3 primeiros termos da série, tem-se:,

$$e^* = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} = 2.666$$

Exemplo. Aproximar $x = 6,283843$ truncando na terceira casa decimal.

$x^* = 6,283.$

Fontes de Erros

Erros de Arredondamento

- Os erros de arredondamento são aqueles surgem das operações aritméticas existentes no método numérico.
- Arredondar um número na casa d_i é desconsiderar as casas $d_{i+j},\ j = 1, 2, 3, \ldots,$ de tal forma que:
  - d_i seja a última casa se $d_{i+1} < 5$;
  - $d_i + 1$ seja aúltima casa se $d_{i+1} \geq 5$;

Exemplo: Arredondar $\pi = 3,1415926535\ldots$ na:

(a) Terceira casa decimal;
$\pi^* = 3,142$;

(b) Quarta casa decimal;
$\pi^* = 3,1416$

Erro absoluto, erro relativo e erro percentual

Seja x um número e x^* uma sua aproximação. O erro cometido na substituição de x por x^* pode ser avaliado em termos:

absolutos: $\Delta_x = |x - x^*|$ (erro absoluto);

relativos: $\delta_x = \frac{|x-x^*|}{|x|} = \frac{\Delta_x}{x}$ (erro relativo);

$\delta_p = \delta_x \times 100\%$ (erro percentual).

Observação

- No caso de $x > x^*$ diz-se que x^* é uma aproximação por defeito e se $x < x^*$, é uma aproximação por excesso;
- geralmente, não conhecemos o valor exacto x, torna-se impossível determinar o valor exacto do erro absoluto. Um número ϵ tal que $\Delta_x < \epsilon$ é chamado cota para o erro Δ_x. Neste caso é habitual usar-se a notação $x = x^* \pm \epsilon$.

Erro absoluto, erro relativo e erro percentual

Exemplo. Seja x um número e x^* uma sua aproximação. Calcule os erros absolutos e relativos.

1. $x = 0,4451$ e $x^* = 0,4500$.
   - $\Delta_x = |0,4451 - 0,4500| = 0,0049$;
   - $\delta_x = \frac{0,0049}{0,4451} = 0.011$;
   - $\delta_p = 1.1\%$;
2. $x = 0,235 \times 10^{-4}$ e $x^* = 0,240 \times 10^{-4}$.
   - $\Delta_x = |0,235 \times 10^{-4} - 0,240 \times 10^{-4}| = 0,5 \times 10^{-6}$;
   - $\delta_x = 0.021$;
   - $\delta_p = 2.1\%$;

Observação

A aproximação efectuada em relação a x é mais exacta que a de y se e somente se $\delta_x < \delta_y$.

Erro absoluto, erro relativo e erro percentual

Algarismos Significativos Correctos

Seja x^* uma aproximação de x. Se

$$\delta_x < 5 \times 10^{-k},$$

então x^* possui pelo menos k algarismos significativos em relação a x.

Exemplo. verifique quantos são os dígitos significativos corretos na aproximação de $x = 3.1415926\ldots$ por $x^* = 3,141592$.

- $\Delta_x = 0.653 \times 10^{-6}$;
- $\delta_x = 2.08 \times 10^{-7} < 5 \times 10^{-7}$;

Portanto, x^* possui 7 algarismos significativos (o sétimo dígito é o dígito 0 que não aparece a direita, i.e, $x^* = 3,1415920$).

Propagação de Erros

- Se tivermos um valor x^* que aproxima x, ao calcularmos a imagem por uma função f, vamos obter uma valor aproximado $f(x^*)$ diferente de $f(x)$. De que forma o erro é propagado ao efectuarmos o cálculo de uma função (ou operaç ao) f num valor aproximado de x?

Propagação de Erros

Função de uma variável

Seja x^* uma aproximação de $x =$. Consideremos uma função contínua e derivável em $[x^* - \Delta_x, x^* + \Delta_x]$. Então pelo Teorema de Lagrange, existe uma constante $c \in]x^* - \Delta_x, x^* + \Delta_x[$, tal que

$$\Delta_f = |f(x) - f(x^*)| = |f'(c)|\Delta_x.$$

Portanto,

$$\Delta_f \leq M\Delta_x,$$

onde $M = \max_{c \in]x^* - \Delta_x, x^* + \Delta_x[} |f'(c)|$.
Quando x^* é muito próximo de x,

$$\Delta_f \approx |f'(x^*)|\Delta_x.$$

Propagação de Erros

Fórmulas de propagação do erro

Seja $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e consideremos que $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ é uma aproximação de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Então

$$\Delta_{f(x^*)} \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right| \Delta_{x_k^*}.$$

Propagação de Erros

Exemplo. Determine o limite superior do erro do volume de uma esfera $V = \frac{\pi d^3}{6}$, se o diametro é $d = 3,7 \pm 0,05$ e $\pi^* = 3,14$

- Considerando d e π como variáveis, temos

$$V'_\pi = \frac{d^3}{6}, \quad V'_d = \frac{\pi d^2}{2}.$$

- Sendo $d^* = 3.7, \; pi^* = 3.14$, utilizando a fórmula de propagação do erro, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta_V &\leq \left|V'_\pi(\pi^*, d^*)\right| \Delta_\pi + \left|V'_\pi(\pi^*, d^*)\right| \Delta_d \\
&\leq \frac{(3,7)^3}{6} \cdot 0,00159 + \frac{3,14 \cdot (3,7)^2}{2} \cdot 0.05 \\
&\leq 1,088.
\end{aligned}$$


GARANTE O TEU FUTURO
COM UMA FORMAÇÃO SÓLIDA
ISUTC
Prolong. da Av. Kim Il Sung (IFT/TDM) Edifício D1
Maputo, Moçambique
www.facebook.com/isutc
www.transcom.co.mz/isutc